

INCLUDEの第二回
公開日:04/5/27

【第二回】:複素数の世界

皆さん、こんにちは。早くも(?)「INCLUDE」第二回です。今回は、皆さんを楽しい「複素数」の世界へ連れてっちゃいます！行っちゃいます！言っちゃいます！（←くどい！！）

さて、皆さん、普段分数を使っていますか？

そうそう、その君！曰く・・・「夏休みの3分の2が終わっちゃったし、ああ、宿題どうしよう～カブトムシなんて採りに行くんじゃあ無かったよ～誰か助けて～オーmyGOD!!!」の、3分の2ですね。（←早めに勉強しなくちゃいけないよ！）

あるいは、「円周率ってどこまで言える？」なんていわれた理系志望のその君！めがね君！「え～と・・・(OIDUS、真剣に考える)・・・
[3.1415926535897932384626433832795028841971693993](https://www.oidus.com/3.1415926535897932384626433832795028841971693993)・・・以下、OIDUSが知らないので略」。隣の友達と競ってますね？ふふふ

普段何気なく使っている「数字」と言うものは、ほとんどが「実数」と呼ばれる種類の数です。それは、長さのものすごく長くて、「終わりのない」定規を用意したときに、「必ず」その定規の目盛りのどこかにいる数です。

今回紹介する、「複素数」と言うものは、その定規の上にはいません。定規を2本、十字に重ねたときに定規の縦と横の目盛りを上と横に伸ばして行って、ぶつかったところにいる数です。

皆さんは、小学校とかの授業で「比例のグラフ」なんて習ったかと思います。グラフは、点をいくつも打って行って、点同士を鉛筆などでなぞってつなげていくと出来上がりますよね？そのとき、何をしているのかというと、実は、点々ごとに2つの数字が隠されていて、たとえば、「1,4」など、定規の縦横の上にある数字を伸ばして行って、縦横ぶつかったところに点を打っていくわけです。そして、グラフは数字(点)の流れをつないで、線で表したものです。グラフに必要な2本の線は「軸」といい、これが2本、垂直に交わっているのを「二次元の直交座標系」などと言います。

で、複素数というのは、そういうグラフを書くときのように、2つの軸が必要です。「普通の」数字は、必ずプラスかマイナスか0のどれかの数字です。この「どれか」というものが重要で、しかし、これの説明が難しいのですが、先ほどのように、定規のどこかにいるときには、その場を離れることなく、ずっと同じ場所にいますよね？上のほうに動いたりしません。つまり、定規のどこかしらの定まった位置に必ずいるのです。ところが、複素数は、定規の上の方向にも動けます。動けるような**特殊な数**なのです。「普通」では無いのです。まずは普通ではないことを覚えておきましょう。

さて、複素数と言うものが、先ほど述べた「実数」と言うものとはっきり違うのは、定規の数が1本多い、少ないと言うことですね。これ、何度も言うように、かなり重要です。では、複素数はどういう数なのか？特殊なだけなのか？それが知りたい。

まあ、結論から先に言うと、複素数は、実数に、とある「おまけ」のついた数です。そのおまけとは、「虚数」と言うものです。

虚数とは、実数と違うものです。実数のいる1本の定規の上には乗れません。なぜなら、虚数が「**同じ物(同じ性質の、つまり、虚数同士)をかけるとマイナスになる数**」だからです。

どういうことを意味するのでしょうか？実数は「プラス×プラス＝プラス」であり、「マイナス×マイナス＝プラス」です。どうです？これは絶対そうでしょうか？もしこうならない実数があるのなら、きっとノーベル賞が取れます。いや、保障はしないけど(笑)。

どうですか？虚数の「**虚数同士はマイナス**」という性質、実数同士では上の通り、マイナスにはなりません。実数でない数なのは確かでしょう。

では・・・そういうものなのだと思って、わかりやすい例をどうぞ。

虚数の「A君」と、まったく同じ、虚数の「C君」が手をつなぐと、「必ず」**けんか**しはじめます。実数の「B君」と、まったく同じ、実数の「D君」が手をつなぐと、「必ず」**仲良**くなります。

A君とC君、B君とD君の2組の違いは「仲良くなる」かどうかです。仲がいい、つまり、**仲良しいいいこと**ですから、B君・D君にとっていいこと、「プラス」になります。ところが、A君・C君はけんかします。**けんかはよくない**、つまり、A君にとって「マイナス」です。

実数は2人手を取ると「必ず」仲良くなり、虚数は「必ず」けんかする、そもそも性格が違うんですから、同じ定規には乗っかれませんか？だから、定規が2本必要になるのです。

さて、とある数、実数でも虚数でもないんですが、それを「虚数+実数」とします。グループを作るようなものでしょうか。このグループの中に、虚数のA君のようなひねくれ者が一人もいなければ、みんな**仲良しになる**・・・つまり、虚数が0だから、実数だけになるのです。逆に、A君がいたら・・・せっかくのパーティが台無しですね。けんかをするA君、仲良しのB君・・・ムードは最悪です。

そんな状態が、「複素数」なのです。

さて、数学的には、複素数はこんな説明がなされていますので、紹介しておきましょう。

「複素数とは、実数aと、虚数biの和である。」

つまり、パーティ会場に、B君のような人がどれだけいて、A君のような人がどれだけいるか、と言うことです。

「i」とは、「虚数単位」というもので、iを2つ同士をかけるとマイナスになる、さっきのA君が、「1人だけ」いる状態です。A君のような人たちが幾人いるか、それを「b」であらわすわけです。

さて、そもそもなぜ虚数というものがあるのでしょうか？答えるのは非常に難しいです。本当に。でもでも、とりあえず乱暴な説明をしておきましょう。

むかし、「2次方程式の解」と言うものの、一般的な求め方・・・これは簡単すぎて、誰の名前がついてるわけでもありませんが、「2次方程式の一般解の求め方」なる法則が導き出されました。

$ax^2+bx+c=0$ を満たすとき、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

という式です。

そして、「XのN次式が0であるとき、Xがその条件を満たすためのXの解はN個ある」ということにのっとって、いろんな方程式を解いていったんです。

たとえば、「 $X^2+X+5=0$ を解く」みたいな感じで。

ですが、あるとき、それは発見されました。

「変な数がある！」

そう、それが虚数だったのです。

たとえば… $x^2+x+1=0$ をさっきの法則に入れてみましょう。そうすると、ルートの中身がマイナスになります。

「ルートの中身は必ずプラスか0だ！」

そう、そうなのです。ルートの中身はプラスと決まっているのです。実数の中では。

だから、そもそもルートの中身がマイナスになるときは、「解なし！」と叫んでもいいんです。実数の中では。

でも、実際、「 X の N 次式が0を満たす時の X の解は N 個ある」のです。だから、「解なし！」じゃないんです。解はあるんです。ただし、これは、実数ではありえないことです。

「新しい数があるんだ！」

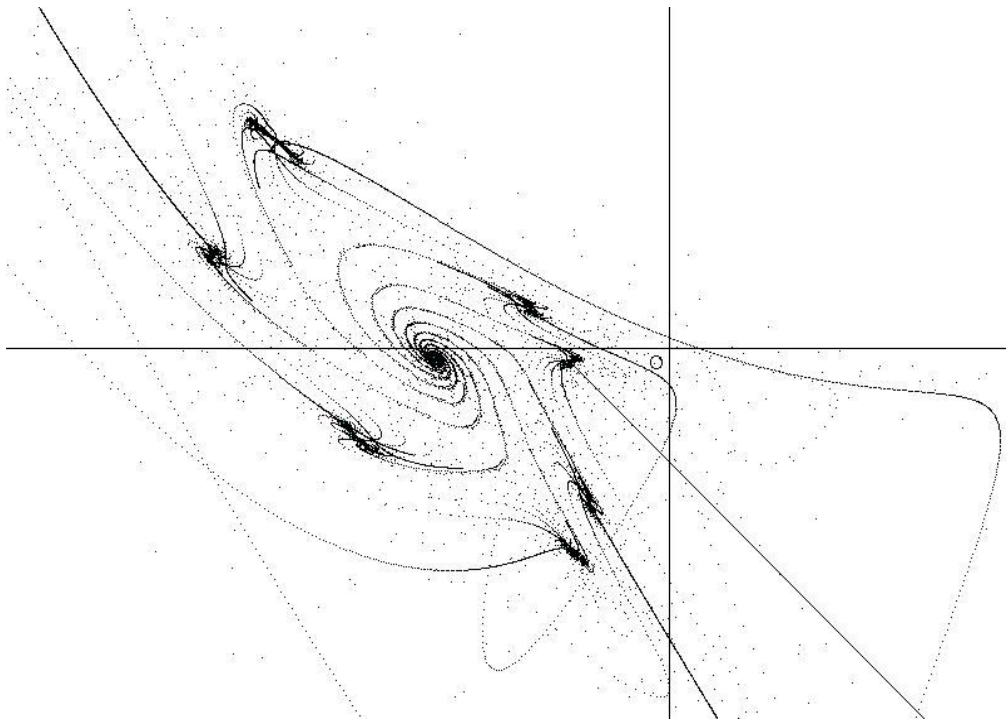
そう、そうでした。それで、「虚数」というものを考え始めました。

「あるものはあるんだから、仕方がない。ならば、新しく数を決めなおそう。」

そういうことで、虚数を含めた複素数が考えられたのです。これは、実数もあわせませす。先ほどのように、虚数の部分(虚部と言います。)が0なら、完全な実数ですので、従来の数の構造にまったく変更を加えることなく、その先だけを拡張したのです。

そして、実際に複素数を考えると、先ほどの解は存在することがわかりました。だから、虚数はあるのです。

さて、これくらいで説明は終わらしましょう。次に、複素数の不思議な性質をご覧に入れましょう。まず、皆さん、下の図をご覧ください。



何に見えますか？宇宙ですか？銀河系ですか？ライブハウスですか？大海原ですか？まあ、見方は人それぞれですが…

肝心なのはここからです。なんとこの図、[たった一個の方程式から生まれた](#)のです。

「え——————！！？」

本当です。「 $Z=C^2+V, C←Z$ 」と言う、至極単純な方程式から、こんなにも複雑な図形が、生まれるのです。もう、文字数との戦いのような、単純な式ですよ！？それなのに、表現できるのです。これはこれはもう有名な式で、初期値の複素数「 V 」を、ちょちょ一つと変化させるといろいろな形になる、「カオス」と呼ばれるものです。カオスとは、初期値のわずかなずれが、同じ関数なのに、その後の予測を困難にするような、原因を生む、そんな物です。

さて、なぜこんな形になるのでしょうか？自信を持って言えるのは、複素数の虚数部分の性質によるものだと思います。

虚数は、先ほども説明した様に、同じ物を掛け合わせるとマイナスになります。マイナスになりうるのです。これが、ぐるぐると繰り返す形を生んでいるのでしょうか。つまり、マイナスになると言うことは、左右反転になると言うことで、境界から対象的になったりするわけです。

さて、今回はこれでおしまいです～。

ダウンロード

さて、記事に使ったプロジェクトを公開します。

[VisualC++6.0プロジェクト…実験で使った図を生成するプロジェクト](#)

メール等の受付

当サイトの管理人は、**MORIO**です。

質問やご要望、ご感想、苦情などは、メールで受け付けております。以下のアドレス宛に送ってくださいませ。

master@morik.net

form 2006/1/9